Übungsblatt 20	Hilfsmittelfreie Abituraufgaben: Analysis			
Fach: Mathematik	Klasse: 12/13	Schwierigkeitsgrad: ●●●● Prüfung	Bearbeitungszeit: 60 min	Lösungen: Hier

Stichworte: Analysis · Integrale · Ableitungen · Standardsymmetrien · Tangente · Untersumme

open mathcourse

Aufgabe 1. **[5 Punkte]**

In der folgenden Abbildung 1 ist der Graph der Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ dargestellt.

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse im Intervall $[0; 3]$ näherungsweise. Nutzen Sie die in Abbildung 1 eingezeichneten Rechtecke.

b) Berechnen Sie nun den exakten Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse im Intervall $[0; 3]$.

c) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung des genäherten Ergebnisses aus Aufgabe 1a) vom exakten Ergebnis aus Aufgabe 1b).

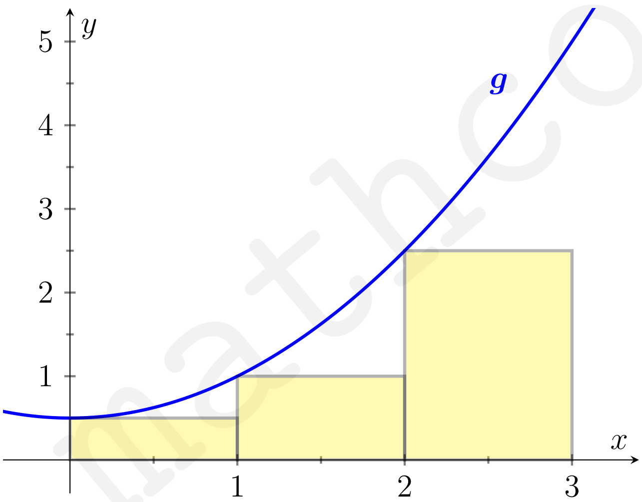

Abbildung 1: Graph der Funktion $g(x)$.

Aufgabe 2. **[5 Punkte]**

Abbildung 2 zeigt die Graphen der vier ganzrationalen Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ und $d(x)$.

a) Wird die erste Ableitung von d gebildet, so ergibt sich eine der drei Funktionen a, b oder c. Ordnen Sie d die korrekte erste Ableitungsfunktion zu und begründen Sie Ihre Wahl.

b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung in Linearfaktordarstellung für die Funktion b.

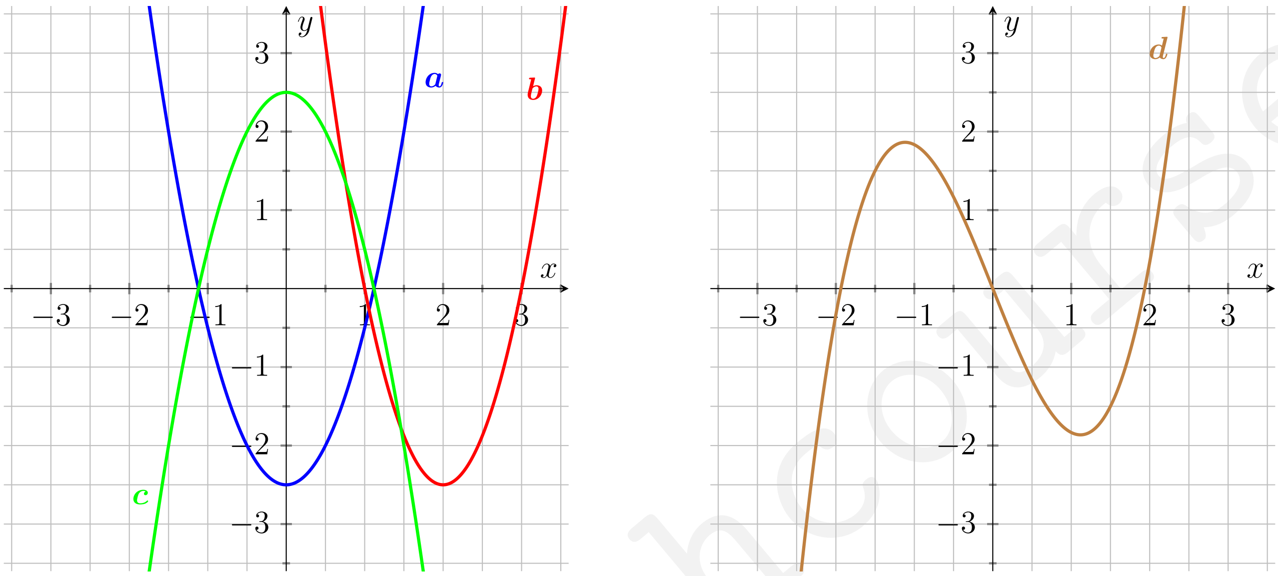

Abbildung 2: Graphen der Funktionen a, b und c links sowie Graph der Funktion d rechts.

Aufgabe 3. **[5 Punkte]**

Die Funktion $f(x) = -2x^3 + 18x$ ist in $\mathbb{R}$ definiert.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Flächeninhalt A ein, die aus zwei Teilflächen besteht. Berechnen Sie den Flächeninhalt A.

Aufgabe 4. **[5 Punkte]**

Die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen j und k sind gegeben. Abbildung 3 zeigt den Graphen von j.

a) Bestimmen Sie grafisch einen Näherungswert des Integrals

$$\int_1^3 j(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

b) Der Graph der Funktion k kann aus dem Graphen der Funktion j mit $k(x) = j(-x) + 1$ erzeugt werden. Beschreiben Sie anschaulich, wie der Graph von k aus dem Graphen von j entsteht. Geben Sie außerdem die Koordinaten des Hochpunktes der Funktion $k(x)$ an.

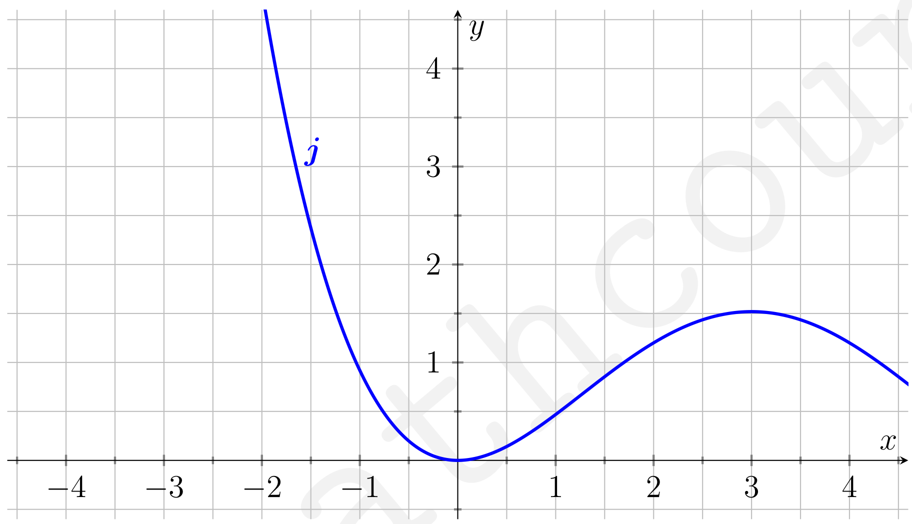

Abbildung 3: Graph der Funktion j.

Aufgabe 5. **[5 Punkte]**

Gegeben ist die Parabel $s(x) = -\frac{2}{5}x^2$. In Abbildung 4 sind die Graphen von s und der Tangente t am Graphen s an der Stelle $x_0 = -2,5$ dargestellt.

a) Ermitteln Sie anhand von Abbildung 4 die Funktionsgleichung der Tangente $t(x)$.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von s im Punkt $(u|s(u))$ die y-Achse im Punkt $(0|-s(u))$ schneidet.

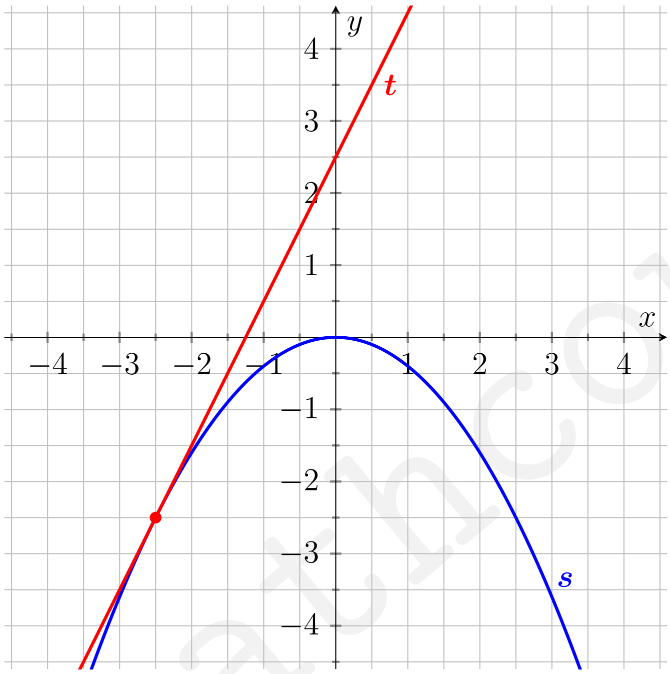

Abbildung 4: Graph der Funktion s und der Tangente t.

Aufgabe 6. **[5 Punkte]**

Ein Flugzeug startet um 08:00 Uhr und landet um 11:00 Uhr. Die Flughöhe über dem Boden kann während dieses Flugs durch die Funktion

$$h(t) = -t^3 + 9t$$

modelliert werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach dem Start und $h(t)$ die Flughöhe in Kilometern. Berechnen Sie $h(2)$ und $h'(2)$ und erläutern Sie die Bedeutung beider Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Aufgabe 7. **[5 Punkte]**

Der Graph der Funktion $m(x) = 2x^3 - 4x - 1$ ist in Abbildung 5 dargestellt.

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} m(x)\mathrm{d}x$$

und erklären Sie mit Hilfe von Abbildung 5, warum das Ergebnis negativ ist.

b) Die Funktion $p(x)$ entsteht aus der gegebenen Funktion durch eine Verschiebung um eine Längeneinheit nach oben entlang der y-Achse. Geben Sie den Wert des analogen Integrals

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$$

ohne Rechnung an.

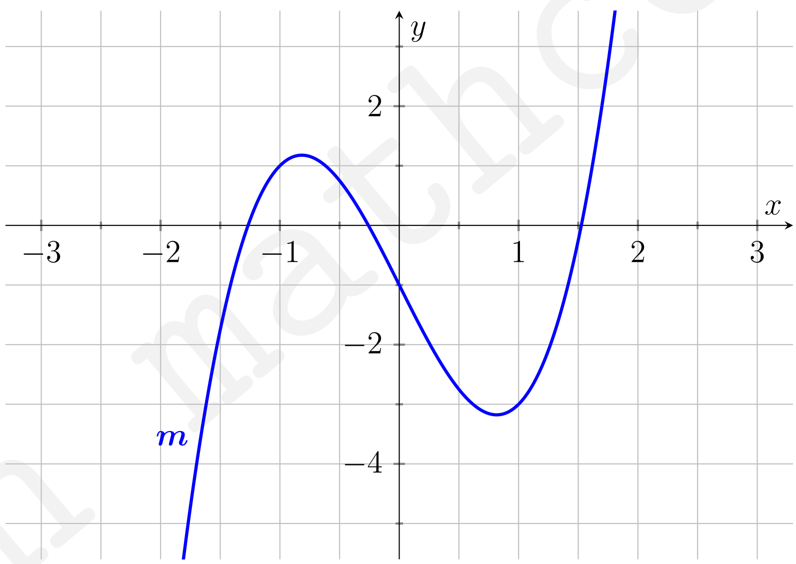

Abbildung 5: Graph der Funktion m.

