Übungsblatt 22	Hilfsmittelfreie Abituraufgaben: Analytische Geometrie II			
Fach: Mathematik	Klasse: 12/13	Schwierigkeitsgrad: ●●●● Prüfung	Bearbeitungszeit: 60 min	Lösungen: Hier

Stichworte: Ebenen, Geraden, Skalarprodukt, Kollinearität, Schnittpunkte, LGS

open mathcourse

Aufgabe 1. **[5 Punkte]**

a) Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein möglicher Normalenvektor der Ebene A, die durch den Punkt $C(2|0|4)$ verläuft. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene A.

b) Die Gerade k verläuft durch den Ursprung und den Punkt $T(-4|2|a)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Parametergleichung von k an und prüfen Sie, ob es einen Parameter a gibt, sodass die Gerade k senkrecht auf der Ebene A steht.

Aufgabe 2. **[5 Punkte]**

Ein 2 m hoher Holzpfeiler steht im Punkt $H(3|-1|0)$ senkrecht auf dem Bühnenboden (xy-Ebene) eines Theaters ($1\text{ LE} = 1\text{ m}$). Bei Beleuchtung durch einen Scheinwerfer fällt der Schatten der Pfeilerspitze auf den Punkt $S(1|-2|0)$ auf dem Bühnenboden.

a) Berechnen Sie die Länge des Schattens, welchen der Holzpfeiler auf den Bühnenboden wirft.

b) Geben Sie den auf die Länge 1 normierten Vektor $\vec{l}$ an, der die Richtung der Lichtstrahlen des Scheinwerfers angibt.

c) Wird der Lichtstrahlvektor $\vec{l}$ mit dem Faktor 6 gestreckt, so verbindet er genau den Scheinwerfer mit der Pfeilerspitze. Bestimmen Sie die Koordinaten der Scheinwerferposition T.

Aufgabe 3. **[5 Punkte]**

Zwei Feuerwehrfahrzeuge F und W bewegen sich gleichzeitig im Zeitraum $0 \leq t \leq 6$. Ihre punktförmigen Positionen werden vereinfacht durch die folgenden Ortsvektoren beschrieben:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei beschreibt t die Zeit in Minuten und eine Längeneinheit entspricht 1 km.

a) Die Fahrzeuge bewegen sich auf geradlinigen Routen. Geben Sie eine Geradengleichung an, welche die Route von Fahrzeug W beschreibt.

b) Ermitteln Sie eine Formel für den Abstand $d(t)$ der beiden Fahrzeuge in Abhängigkeit der Zeit t.

c) Geben Sie ohne Rechnung an, zu welchem Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum der Abstand der beiden Fahrzeuge minimal ist.

Aufgabe 4. **[5 Punkte]**

Gegeben sind die Ebene $E:\ 2x+2y+z=15$, der Punkt $P(1|1|2)$ und die Gerade

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\6\end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E.

b) Geben Sie die Bedeutung des Endergebnisses der Rechnung im Kasten an und erklären Sie kurz, was in jeder Zeile berechnet wird. *Hinweis: Es sind keine Rechnungen erforderlich.*

$$a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

$$2(1+2s)+2(1+2s)+(2+s)=15 \quad\Leftrightarrow\quad s=1 \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{k}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow K(3|3|3) \qquad \text{(III)}$$

$$\overrightarrow{PK}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{PK}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3 \qquad \text{(IV)}$$